2025年深圳市高三年级第一次调研考试
数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	B	C	B	C	B	D

命题说明：

1．**说明**：本题改编自人教A版必修第一册10页例1.

2．**说明**：本题改编自人教A版必修第二册71页例2.

3．**说明**：本题改编自人教A版必修第二册60页第8题.

4．**说明**：本题改编自人教A版必须第一册229页第9题.

5．**说明**：本题改编自2024年新高考全国Ⅱ卷第6题.

6．**说明**：本题改编自人教A版选择性必修第一册129页第13题.

7．**说明**：本题改编自2024年新高考全国Ⅰ卷第13题.

8．**说明**：本题改编自人教A版必修第二册119页例4.

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

题号	9	10	11
答案	ABD	AC	AD

命题说明：

9．**说明**：本题改编自人教A版选择性必修第三册112页思考.

10．**说明**：本题改编自人教A版必修第一册250页阅读与思考.

11．**说明**：本题改编自人教A版选择性必修第一册116页第11题.

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12．<u>240</u>　　　13．<u>6</u>　　　14．<u>14</u>

命题说明：

12．**说明**：本题改编自人教A版选择性必修第三册35页第6题.

13．**说明**：本题改编自人教A版选择性必修第二册31页第3题.

14．**说明**：本题改编自《趣味数学100题》.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，$c^2=a^2+b^2-ab$，$\cos 2B=\sin C$.

（1）求B；

（2）若$b=1$，求$\triangle ABC$的面积.

【命题说明】本题改编自 2024 年新高考全国 I 卷第 15 题.

【参考答案】

（1）由余弦定理推论$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$及$c^2=a^2+b^2-ab$得 ……………………1 分

$\cos C=\dfrac{1}{2}$， ……………………2 分

由于$C\in(0,\pi)$， ……………………3 分

则$C=\dfrac{\pi}{3}$， ……………………4 分

又因为$\cos 2B=\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且$B\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$， ……………………5 分

所以$2B=\dfrac{\pi}{6}$，则$B=\dfrac{\pi}{12}$. ……………………6 分

（2）**解法 1** 由（1）可知$A=\dfrac{7\pi}{12}$， ……………………7 分

且$\sin B=\sin\dfrac{\pi}{12}=\sin(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$， ……………………8 分

$\sin A=\sin\dfrac{7\pi}{12}=\sin(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$， ……………………9 分

由正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$， ……………………10 分

得$a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{\sin A}{\sin B}=2+\sqrt{3}$， ……………………11 分

所以$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times(2+\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$. ……………………13 分

解法 2 由（1）$A=\dfrac{\pi}{2}+B$， ……………………7 分

所以$\sin B=-\cos A$， ……………………8 分

由正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$， ……………………9 分

得$a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{\sin A}{\sin B}=-\tan A=-\tan(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3})=2+\sqrt{3}$， ……………………11 分

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times(2+\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$. ……………………13 分

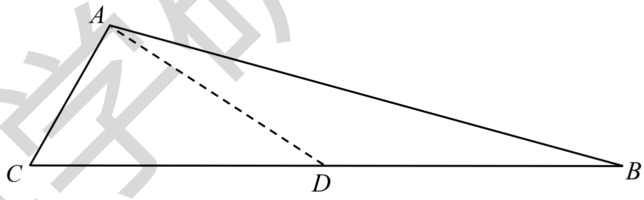
解法 3 如图，过点A作$AD\perp AC$交BC于D， ……………………7 分

由于$A=\dfrac{7\pi}{12}$，则$\angle DAB=\angle B=\dfrac{\pi}{12}$， ……………………8 分

所以 $AD=DB=\sqrt{3}$，$CD=2$， ……………………………………………………………10 分

$a=2+\sqrt{3}$， ………………………………………………………………………………………11 分

所以 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times(2+\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$． …………………………………13 分

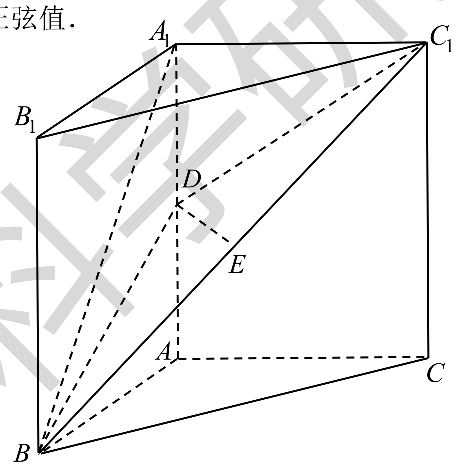


16．（15 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=2\sqrt{3}$，$\angle BAC=120°$，D 为 AA_1 的中点，E 为 BC_1 的中点．

（1）证明：$DE\perp$ 平面 B_1BCC_1；

（2）若 $BB_1=6$，求直线 A_1B 与平面 DBC_1 所成角的正弦值．



【命题说明】本题改编自 2023 年新高考全国 I 卷第 18 题.

【参考答案】

（1）取 BC 中点 M，连接 AM，ME， ………………………………………………………1 分

因为 $AB=AC$，所以 $AM\perp BC$， ……………………………………………………………2 分

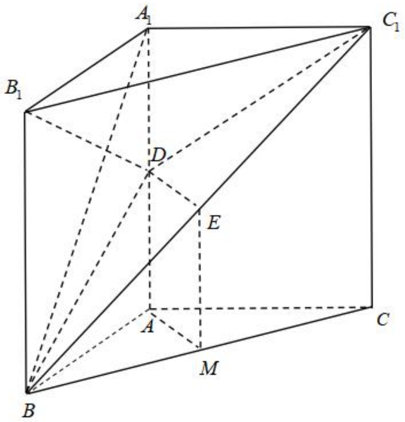
由于点 E 为正方形 B_1BCC_1 对角线的交点， E 为 BC_1 的中点，所以 EM 为 $\triangle BCC_1$ 的中位线，所以 $EM//CC_1//AD$， ……………………………………………………………………………3 分

又 $EM=\dfrac{1}{2}CC_1=\dfrac{1}{2}AA_1=AD$，所以四边形 $AMED$ 为平行四边形，…………………………4 分

又因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$AM\subset$ 平面 ABC，则 $AA_1\perp AM$，$EM\perp AM$， ……………5 分

由于 $EM,BC\subset$ 平面 B_1BCC_1，$EM\cap BC=M$，所以 $AM\perp$ 平面 B_1BCC_1， ……………6 分

又因为 $DE//AM$，所以 $DE\perp$ 平面 B_1BCC_1． ……………………………………………………7 分



（2）**解法 1** 由（1）可知：MA，MC，ME 两两垂直，如图，以 M 为坐标原点，以 MC 所在直线为 x 轴，MA 所在直线为 y 轴，ME 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，…………8 分

在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，由余弦定理可得：$B_1C_1^2 = A_1B_1^2 + A_1C_1^2 - 2A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \cos\angle B_1A_1C_1$，

则 $B_1C_1 = 6$，…………………………………………………………………………9 分

于是 $D(0,\sqrt{3},3)$，$B(-3,0,0)$，$B_1(-3,0,6)$，$C_1(3,0,6)$，$A_1(0,\sqrt{3},6)$，

则 $\overrightarrow{BA_1} = (3,\sqrt{3},6)$，……………………………………………………………11 分

设 $\vec{n} = (x,y,z) \perp$ 平面 DBC_1，$\overrightarrow{BD} = (3,\sqrt{3},3)$，$\overrightarrow{BC_1} = (6,0,6)$，…………………12 分

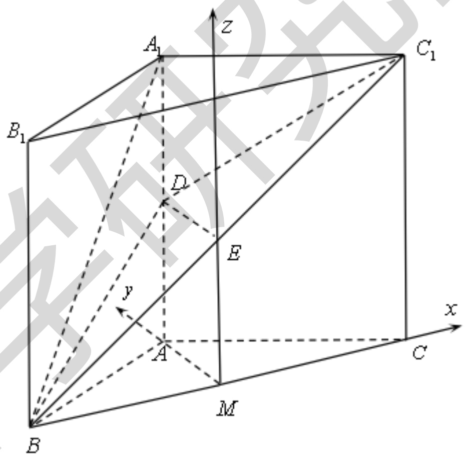
于是 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 3x + \sqrt{3}y + 3z = 0 \\ 6x + 6z = 0 \end{cases}$，…………………………………13 分

令 $z = 1$，则 $\vec{n} = (-1,0,1)$，……………………………………………………………14 分

设直线 A_1B 与平面 DBC_1 所成角为 θ，

那么 $\sin\theta = \left|\cos < \overrightarrow{BA_1}, \vec{n} >\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{BA_1} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BA_1}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \dfrac{3}{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$，

即直线 A_1B 与平面 DBC_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$．…………………………………………15 分



解法 2 在$\triangle A_1B_1C_1$中，由余弦定理可得：$B_1C_1^{\ 2}=A_1B_1^{\ 2}+A_1C_1^{\ 2}-2A_1B_1\cdot A_1C_1\cdot\cos\angle B_1A_1C_1$，

则$B_1C_1=6$，……………………………………………………………………………………8 分

如图，连接B_1E，由（1），$DE\perp$平面B_1BCC_1，$BC_1\subset$平面B_1BCC_1，则$DE\perp BC_1$，………9 分

又因为$BB_1=B_1C_1$，四边形B_1BCC_1为正方形，E为BC_1的中点，$B_1E\perp BC_1$，…………10 分

由于$B_1E\cap DE=E$，B_1E，$DE\subset$平面B_1DE，则$BC_1\perp$平面B_1DE，……………………11 分

如图，记$A_1B\cap B_1D=N$，过点N作$NH\perp DE$，连接BH，由于$BC_1\perp$平面B_1DE，$NH\subset$平面B_1DE，

则$NH\perp BC_1$，又因为$DE\cap BC_1=E$，$DE,BC_1\subset$平面DBC_1，则$NH\perp$平面DBC_1，…………12 分

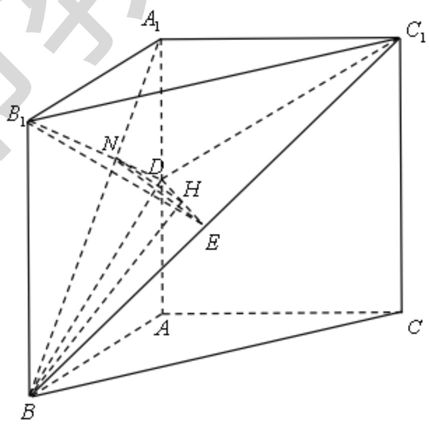
所以$\angle NBH$即为直线A_1B与平面DBC_1所成角，由于$\triangle A_1DN\sim\Delta BB_1N$，

则$\dfrac{B_1N}{ND}=\dfrac{BN}{A_1N}=2$，……………………………………………………………………13 分

由于$DE\perp B_1E$，则H为DE的三等分点，则$NH=\dfrac{1}{3}B_1E=\sqrt{2}$，$NB=\dfrac{8}{\sqrt{3}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$，

于是$\sin\angle NAH=\dfrac{NH}{NB}=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$，……………………………………………………………14 分

即直线A_1B与平面DBC_1所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{8}$．………………………………………15 分



解法 3 设直线A_1B与平面DBC_1所成角为θ，点A_1到平面DBC_1的距离为h，

则$\sin\theta=\dfrac{h}{|A_1B|}$，……………………………………………………………………………8 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1B_1B$ 中，$A_1B_1=2\sqrt{3}$，$BB_1=6$，则 $A_1B=4\sqrt{3}$，……………………………………9 分

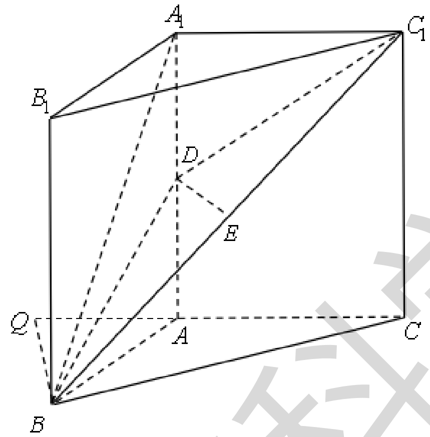
过 B 作 $BQ\perp CA$ 交 CA 的延长线于 Q，易得 $BQ=3$，…………………………………10 分

且易证 $BQ\perp$ 平面 A_1ACC_1，………………………………………………………………………11 分

由于 $S_{\triangle A_1DC_1}=\dfrac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，则 $V_{B-A_1DC_1}=\dfrac{1}{3}\times 3\sqrt{3}\times 3=3\sqrt{3}$，……………………13 分

在 $\triangle DBC_1$ 中，$DB=DC_1=\sqrt{21}$，且 $BC_1=6\sqrt{2}$，$S_{\triangle DBC_1}=\dfrac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{6}$，…………14 分

又 $V_{A_1-BDC_1}=V_{B-A_1DC_1}=3\sqrt{3}$，则 $h=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$，$\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\times\dfrac{1}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$.………………………15 分



17.（15 分）

甲参加围棋比赛，采用三局两胜制，若每局比赛甲获胜的概率为 $p(0<p<1)$，输的概率为 $1-p$，每局比赛的结果是独立的.

（1）当 $p=\dfrac{2}{3}$ 时，求甲最终获胜的概率；

（2）为了增加比赛的趣味性，设置两种积分奖励方案. 方案一：最终获胜者得 3 分，失败者得 -2 分；方案二：最终获胜者得 1 分，失败者得 0 分，请讨论选择哪种方案，使得甲获得积分的数学期望更大.

【命题说明】本题改编自 2024 年新高考全国 II 卷第 18 题.

【参考答案】

（1）记“甲最终以 $2:1$ 获胜”为事件 A，记“甲最终以 $2:0$ 获胜”为事件 B，“甲最终获胜”为事件 C，………………………………………………………………………1 分

于是 $C=A\cup B$，A 与 B 为互斥事件，…………………………………………………2 分

由于 $P(A)=C_2^1\cdot p\cdot p\cdot(1-p)=\dfrac{8}{27}$，…………………………………………………3 分

$P(B)=p^2=\dfrac{4}{9}$，……………………………………………………………………………4 分

则 $P(C)=P(A)+P(B)=3p^2-2p^3=\dfrac{20}{27}$，…………………………………………5 分

即甲最终获胜的概率为$\frac{20}{27}$. ……………………………………………………………………6 分

（2）由（1）可知，$P(C)=P(A)+P(B)=3p^2-2p^3$，………………………………………………7 分

若选用方案一，记甲最终获得积分为X分，则X可取3，-2， ………………………………………8 分

$P(X=3)=P(C)=3p^2-2p^3$，$P(X=-2)=1-3p^2+2p^3$， ………………………………………9 分

则X的分布列为：

X	3	-2
p	$3p^2-2p^3$	$1-3p^2+2p^3$

则$E(X)=9p^2-6p^3-2+6p^2-4p^3=-10p^3+15p^2-2$， ………………………………………10 分

若选用方案二，记甲最终获得积分为Y分，则Y可取1，0，……………………………………………11 分

$P(Y=1)=P(C)=3p^2-2p^3$ $P(Y=0)=1-3p^2+2p^3$，…………………………………………………12 分

则Y的分布列为：

Y	1	0
p	$3p^2-2p^3$	$1-3p^2+2p^3$

则$E(Y)=3p^2-2p^3$， ……………………………………………………………………………………13 分

所以$E(X)-E(Y)=-8p^3+12p^2-2=-4(p-\frac{1}{2})\left(2p^2-2p-1\right)$，

由于$0<p<1$，则$2p^2-2p-1=2p(p-1)-1<0$，……………………………………………………14 分

【14 分段：设$f(p)=-8p^3+12p^2-2$，$0<p<1$，利用$f'(p)=-24p^2+24p=-24p(p-1)>0$，则$f(p)$在$(0,1)$上单调递增，且$f(\frac{1}{2})=0$.】

于是$p=\frac{1}{2}$时，两种方案都可以选，

当$0<p<\frac{1}{2}$时，$E(X)<E(Y)$，应该选第二种方案，

当$\frac{1}{2}<p<1$时，$E(X)>E(Y)$，应该选第一种方案. …………………………………………15 分

18.（17 分）

已知抛物线$y^2=2x$，过点$N(2,0)$作两条直线l_1,l_2分别交抛物线于A,B和C,D（其中A,C在x轴上方）.

（1）当l_1垂直于x轴，且四边形$ACBD$的面积为$4\sqrt{5}$，求直线l_2的方程；

（2）当l_1,l_2倾斜角互补时，直线AC与直线BD交于点M，求$\triangle MAB$的内切圆的圆心横坐标的

取值范围.

【命题说明】本题改编自2014年全国大纲卷第21题.

【参考答案】

解：(1) 解法1 当$l_1 \perp x$轴，令$x=2$，则$A(2,2)$，$B(2,-2)$，$|AB|=4$， ……1分

设直线$l_2: y=kx-2k$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，由于$S=\frac{1}{2}\times 4\times|x_1-x_2|=4\sqrt{5}$，

则$|x_1-x_2|=2\sqrt{5}$， ……2分

由于$\begin{cases} y=kx-2k \\ y^2=2x \end{cases}$，则$k^2x^2-(4k^2+2)x+4k^2=0$，则$\begin{cases} x_1+x_2=4+\frac{2}{k^2}, \\ x_1x_2=4 \end{cases}$ ……3分

$(x_1-x_2)^2=(4+\frac{2}{k^2})^2-16=20$， ……4分

则$4+\frac{2}{k^2}=6$，则$k=\pm 1$， ……5分

所以直线l_2的方程为$x+y-2=0$或$x-y-2=0$. ……6分

解法2 设$l_2: x=ty+2$，倾斜角为α，由对称性知l_2有两条，且关于l_1对称， ……1分

不妨设$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，那么$\angle ANC=\frac{\pi}{2}-\alpha$，$t>0$，

则$S=\frac{1}{2}\times 4\times|CD|\times\cos\alpha=4\sqrt{5}$，则$|CD|\cos\alpha=2\sqrt{5}$， ……2分

由于$\begin{cases} y^2=2x \\ x=ty+2 \end{cases} \Rightarrow y^2-2ty-4=0$，则$\begin{cases} y_1+y_2=2t \\ y_1\cdot y_2=-4 \end{cases}$， ……3分

则$|CD|=\sqrt{1+t^2}\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{4t^2+16}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$， ……4分

$|CD|\cos\alpha=2t\sqrt{t^2+4}=2\sqrt{5}$，$(t^2-1)(t^2+5)=0$， ……5分

则$t=1$，$x=y+2$由对称性，另一条直线：$x=-y+2$，

所以直线l_2的方程为$x+y-2=0$或$x-y-2=0$. ……6分

(2) 解法1 设点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

因为$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2}{y_1+y_2}$，同理：$k_{CD}=\frac{2}{y_3+y_4}$，$k_{AC}=\frac{2}{y_1+y_3}$，$k_{BD}=\frac{2}{y_2+y_4}$， ……7分

所以$AB: y-y_1=\frac{2}{y_2+y_1}(x-x_1)$，$AB:(y_1+y_2)y-y_1y_2=2x$，$CD:(y_3+y_4)y-y_3y_4=2x$，

$AC:(y_1+y_3)y-y_1y_3=2x$，$BD:(y_2+y_4)y-y_2y_4=2x$， ……8分

又因为$k_{AB}=-k_{CD}$，直线AB和直线CD交于点$N(2,0)$，

所以$\frac{2}{y_1+y_2}=-\frac{2}{y_3+y_4}$，且$-y_1y_2=-y_3y_4=4$，即$\begin{cases} y_1y_2=y_3y_4=-4 \\ y_1+y_2=-(y_3+y_4) \end{cases}$， ……9分

$y_1-\frac{4}{y_1}=-y_3+\frac{4}{y_3}$，且$y_1\neq y_3$，化简得：$y_1y_3=4$，于是$y_3=-y_2$，$y_4=-y_1$， ……10分

则$\begin{cases}(y_1+\dfrac{4}{y_1})y=2x+4\\-(y_1+\dfrac{4}{y_1})y=2x+4\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$，所以点$M(-2,0)$，……………………………11 分

由于$y_4=-y_1$，则$x_4=x_1$，所以$k_{MD}=\dfrac{y_4}{x_4+2}=\dfrac{-y_1}{x_1+2}=-k_{MA}$，则$x$轴平分$\angle AMB$，…………12 分

设$\triangle MAB$的内切圆圆心$Q(n,0)$，$-2<n<2$，则Q到MA的距离$r=\dfrac{2n+4}{\sqrt{4+(y_1+\dfrac{4}{y_1})^2}}$，

点Q到AB的距离$r=\dfrac{4-2n}{\sqrt{4+(y_1-\dfrac{4}{y_1})^2}}$， 于是$\dfrac{4+2n}{\sqrt{4+(y_1+\dfrac{4}{y_1})^2}}=\dfrac{4-2n}{\sqrt{4+(y_1-\dfrac{4}{y_1})^2}}$，………13 分

所以$\dfrac{2+n}{2-n}=\sqrt{\dfrac{4+(y_1+\dfrac{4}{y_1})^2}{4+(y_1-\dfrac{4}{y_1})^2}}=\sqrt{\dfrac{(y_1^2+\dfrac{16}{y_1^2})+12}{(y_1^2+\dfrac{16}{y_1^2})-4}}=\sqrt{1+\dfrac{16}{(y_1^2+\dfrac{16}{y_1^2})-4}}$，…………………………14 分

由于$y_1^2+\dfrac{16}{y_1^2}>8$，当且仅当$y_1^2=4$取等号（舍），……………………………………15 分

则$1<\dfrac{2+n}{2-n}<\sqrt{5}$，……………………………………………………………………16 分

则$0<n<3-\sqrt{5}$，$n\in(0,3-\sqrt{5})$．………………………………………………17 分

【14～17 分段：

$$n=\frac{\left(\sqrt{4+(y_1+\dfrac{4}{y_1})^2}-\sqrt{4+(y_1-\dfrac{4}{y_1})^2}\right)^2}{8}=\frac{\left(\sqrt{12+(y_1^2+\dfrac{16}{y_1^2})}-\sqrt{-4+(y_1^2+\dfrac{16}{y_1^2})}\right)^2}{8},$$

令$z=y_1^2+\dfrac{16}{y_1^2}>8$，当且仅当$y_1=\pm2$取等号（舍），

则$n=\dfrac{(\sqrt{12+z}-\sqrt{-4+z})^2}{8}$，设$f(z)=\sqrt{12+z}-\sqrt{-4+z}$，$z>8$，

$f'(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{12+z}}-\dfrac{1}{2\sqrt{z-4}}=\dfrac{\sqrt{z-4}-\sqrt{z+12}}{2\sqrt{12+z}\sqrt{z-4}}<0$，

则$f(z)$在$(8,+\infty)$单调递减，$0<n<f(8)=3-\sqrt{5}$，$n\in(0,3-\sqrt{5})$．】

解法 2 点$M(-2,0)$证明同解法 1；…………………………………………………11 分

设ΔMAB的内切圆圆心$Q(n,0)$，$-2<n<2$，

设定点$N(2,0)$，由于$|MQ|=2+n$，$|NQ|=2-n$，设半径为r，……………………12 分

设$\angle AMQ=\alpha$，$\angle ANQ=\beta$，于是$\sin\alpha=\dfrac{r}{2+n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t_{AM}^2}}$，

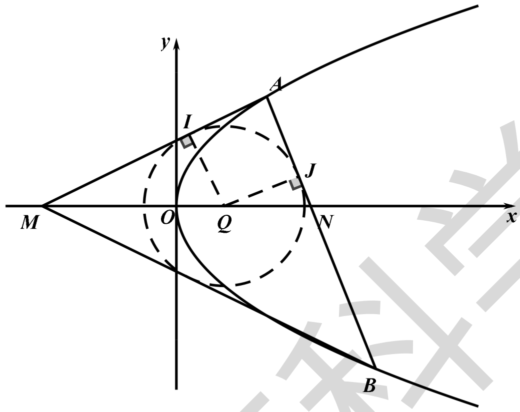
$\sin(\pi-\beta)=\sin\beta=\dfrac{r}{2-n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t_{AB}^{2}}}$，……………………………………………………13 分

那么 $\dfrac{2+n}{2-n}=\sqrt{\dfrac{1+t_{MA}^{2}}{1+t_{AB}^{2}}}=\sqrt{\dfrac{y_1^2+(x_1+2)^2}{y_1^2+(x_1-2)^2}}=\sqrt{\dfrac{x_1^2+6x_1+4}{x_1^2-2x_1+4}}$，……………………………14 分

设 $f(x_1)=\dfrac{x_1^2+6x_1+4}{x_1^2-2x_1+4}=\dfrac{8x_1}{x_1^2-2x_1+4}+1=\dfrac{8}{x_1+\dfrac{4}{x_1}-2}+1>1,x_1>0$，……………………15 分

由于 $x_1+\dfrac{4}{x_1}>4$，当且仅当 $x_1=2$ 取等号（舍），则 $1<\dfrac{2+n}{2-n}<\sqrt{5}$，………………………16 分

则 $0<n<3-\sqrt{5}$，则 $n\in(0,3-\sqrt{5})$.…………………………………………………………17 分



【13～14 分段： 在 $\triangle AMN$ 中，由角平分线定理：

$\dfrac{S_{\triangle AMQ}}{S_{\triangle ANQ}}=\dfrac{|MQ|}{|NQ|}=\dfrac{|AM|}{|AN|}$，则 $\dfrac{2+n}{2-n}=\dfrac{\sqrt{(x_1-2)^2+y_1^2}}{\sqrt{(x_2-2)^2+y_2^2}}=\sqrt{\dfrac{x_1^2+6x_1+4}{x_1^2-2x_1+4}}$.】

19.（17 分）

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足，a_1，a_2 为正整数，$a_n=|a_{n+1}-a_{n+2}|$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）若 $a_1=1$，$a_3=2$，求 a_4；

（2）证明："存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k=0$"是"$\{a_n\}$ 是周期为 3 的数列"的必要不充分条件；

（3）若 $a_1\neq a_2$，是否存在数列 $\{a_n\}$，使得 $a_n<2025$ 恒成立？若存在，求出一组 a_1,a_2 的值；若不存在，请说明理由.

【命题说明】本题改编自 2006 年北京卷第 20 题

【参考答案】

解：（1）因为 $a_n=|a_{n+1}-a_{n+2}|$ 对任意 $n\in\mathbb{N}^*$ 成立;

令 $n=1$ 得 $1=a_1=|a_2-a_3|$，所以 $1=|a_2-2|$，则 $a_2=1$ 或 3，……………………………………1 分

若 $a_2=1$，由 $a_2=|a_3-a_4|$，则 $1=|2-a_4|$，则 $a_4=1$ 或 3，……………………………………2 分

若 $a_2=3$，由 $a_2=|a_3-a_4|$，则 $3=|2-a_4|$，则 $a_4=-1$ 或 5， ……………………………3 分

因为 $a_4=|a_5-a_6|\geq 0$，综上所述：$a_4=1$ 或 3 或 5． ………………………………………4 分

（2）①记 $a_1=x,a_2=y$

必要性：若 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列，$a_3=a_1+a_2$ 或 a_2-a_1， ……………………………5 分

当 $a_3=a_1+a_2$ 时，数列 $\{a_n\}$ 前 5 项为：$x,y,x+y,x,y$，

由 $a_3=|a_4-a_5|$ 得 $x+y=|x-y|$，该式当且仅当 $x=0$ 或 $y=0$ 时成立，

与 a_1,a_2 为正整数矛盾；…………………………………………………………………………………6 分

当 $a_3=a_2-a_1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 前 5 项为：$x,y,y-x,x,y$，

由 $a_2=|a_3-a_4|$ 得 $y=|y-2x|$，则 $y=2x-y$ 或 $y=y-2x$（舍，此时 $x=0$），

因此 $x=y$，$a_3=0$，此时数列 $\{a_n\}$：$x,x,0,x,x,0,x,x,0,\cdots$，存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k=0$，………7 分

另一方面：取数列 $\{a_n\}$：$1,1,0,1,1,2,3,5,\cdots$ 其中当 $n\geq 3$ 时，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，

此时数列 $\{a_n\}$ 不是周期数列，……………………………………………………………………8 分

综上，“存在 $k\in\mathbb{N}^*$，使得 $a_k=0$”是“$\{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列”的必要不充分条件．……………………………………………………………………………………………………9 分

（3）不存在，理由如下：

$a_n=|a_{n+1}-a_{n+2}|$ 等价于 $a_{n+2}=\begin{cases}a_{n+1}-a_n(*)\\ \text{或}\\ a_{n+1}+a_n(**)\end{cases}$，……………………………………………10 分

首先说明不存在 $k\in\mathbb{N}^*$，使得 $a_k=0$，否则由 $a_{k-2}=|a_{k-1}-a_k|$ 得 $a_{k-2}=a_{k-1}$ 记为 w，

所以 $a_{k-3}=|a_{k-2}-a_{k-1}|=0$，$a_{k-4}=|a_{k-3}-a_{k-2}|=w$，$a_{k-5}=|a_{k-4}-a_{k-3}|=w$，

依此类推得前 k 项为 $\cdots,w,0,w,w,0,w,w,0$（第 k 项），则 a_1,a_2 要么相等，要么有一项为 0，矛盾，

因此 $a_n\geq 1$ 对任意 $n\in\mathbb{N}^*$ 成立，………………………………………………………11 分

其次，不存在 $k\in\mathbb{N}^*$，使得 $a_{k+2}=a_{k+1}-a_k$ 以及 $a_{k+3}=a_{k+2}-a_{k+1}$ 同时成立，否则两式相加得 $a_{k+3}=-a_k$，矛盾．…………………………………………………………………………12 分

（i）若 $(*)$ 式只对有限个正整数 n 才成立，不妨设当且仅当 $n\in\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$ 时 $(*)$ 式成立，

其中 $p_1<p_2<\cdots<p_k$，则当 $n\geq p_k+1$ 时，$(**)$ 式恒成立，此时 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\geq a_{n+1}+1$ 恒成立，

由此易知当 $n\geq p_k+1$，$a_n\geq n-p_k$，因此数列 $\{a_n\}$ 是无界数列，……………………………………13 分

（ii）若存在无限个正整数 n 使得 $(*)$ 式成立，不妨设当且仅当 $n\in\{i_1,i_2,\cdots,i_k,\cdots\}$ 时 $(*)$ 式成立，

其中 $i_1<i_2<\cdots<i_k<\cdots$，考虑 $a_{i_{m+1}}$ 与 a_{i_m}，为方便书写记且 $i_m=p$，$i_{m+1}=p+j$，$j\geq2$，则

$a_p=a_{p-1}-a_{p-2}$，$a_{p+1}=a_p+a_{p-1}$，

若 $j=2$，则 $a_{p+j-1}=a_{p+1}=a_{p-1}+a_p\geq a_{p-1}+1$，

若 $j>2$，则 $a_{p+2}=a_{p+1}+a_p$，…，$a_{p+j-1}=a_{p+j-2}+a_{p+j-3}$，$a_{p+j}=a_{p+j-1}-a_{p+j-2}$，

则 $a_p<a_{p+1}<\cdots<a_{p+j-2}<a_{p+j-1}$，

此时 $a_{p+j-1}=a_{p+j}+a_{p+j-2}\geq1+a_{p+j-2}\geq1+a_{p+1}\geq a_{p-1}+2$，………………………………………15 分

无论哪种情况总有 $a_{p+j-1}\geq a_{p-1}+1$ 成立，即 $a_{i_{m+1}-1}\geq a_{i_m-1}+1$ 恒成立，………………………16 分

记 $b_k=a_{i_k-1}$，则 $b_{k+1}\geq b_k+1$ 恒成立，由此易得数列 $\{a_n\}$ 是无界数列，所以，存在 $n\in\mathbf{N}^*$ 使得 $a_n\geq2025$，故不存在符合题意的 a_1,a_2．……………………………………………………………17 分